Exercices et problèmes

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

1. $f : x \mapsto (x-1)^2(x-3)$, $a = 2$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{2x^4}{(x+2)^2}$, $a = -1$.
3. $f : x \mapsto x\left(2\sqrt{x}-3\right)$, $a = 4$.
4. $f : x \mapsto \cos^3 x + \sin x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$.

2 1. Donner une approximation affine de $\dfrac{1}{(1+h)^2}$ pour h voisin de 0.

2. En déduire une estimation des réels $\dfrac{1}{(1.0000000002)^2}$ et $\dfrac{1}{(0.9999999998)^2}$.

3 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 3x^{10} - \dfrac{5}{4}x^8 + 3x - 10$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \left(1 - x - 3x^3\right)(x+2x)^3$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-x}$, $I =]1, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$, $I = [1, +\infty[$.
5. $f : x \mapsto \cos(3x) - \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$, $I =]0, \pi]$.
7. $f : x \mapsto (1+\sin(2x))^3$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, $I = [0,1[$.
9. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $I =]1, +\infty[$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$, $I =]0, +\infty[$.

4 Déterminer, dans chacun des cas, les dérivées successives de la fonction f.

1. $f : x \mapsto x^5 - 2x^3 + 3x + 4$.
2. $f : x \mapsto \cos x$.
3. $f : x \mapsto \sin(2x)$.

5 Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que $f(1) = f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 1$.

6 1. Calculer les dérivées d'ordre 3 des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par $h(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,

$$h(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$

b. En déduire la dérivée d'ordre 3 de la fonction h.

7 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.

Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f\left(\sqrt{2+x}\right)}{x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f\left(2\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)}{x-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin\left(f(x)\right)}{x-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f\left(x^2+x+2\right)}{x}$.

8 Vérifier, dans chacun des cas suivants, que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$, $I =]0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn